

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

• Introducción

Ejemplo de sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{array} \right\} \quad || = \text{determinante} \neq 0$$

Geométicamente equivale a 3 planos en \mathbb{R}^3 y calcular la solución del sistema equivale a hallar la intersección de los planos

Cualquier sistema lineal lo podemos representar por $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Por el teorema de Rouché-Frobenius siempre que $|A| \neq 0$, la solución existe y es única y se puede calcular por la regla de Cramer

• Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

- Métodos directos. Aplican algún tipo de algoritmo para hallar la solución exacta (pienso fama por los errores de redondeo y los posibles errores en los datos A y b de partida). Además para sistemas muy grandes (100-500 ecuaciones) y densos (con pocos elementos nulos).

- Métodos iterativos. Tratan de crear una función de vectores $\{x^k\}$ que converja a la solución. Errores de redondeo y de truncamiento. Para sistemas de orden muy alto (10^5 ecuaciones) y con elementos nulos

MÉTODOS DIRECTOS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los métodos directos son aquellos que nos llevan a la solución exacta tras un número finito de operaciones si no hubiera errores de redondeo. Esto es una máquina de precisión infinita dando la solución exacta. Es una diferencia fundamental frente a las ec. no lineales, donde no hay forma de conocer la solución exacta salvo en los casos más sencillos.

En los métodos directos hay que controlar el tiempo (de nada vale un algoritmo que garantice la solución en un tiempo excesivo) y el estudio de los errores de redondeo cometidos.

Si utilizamos directamente la regla de Cramer para hallar la solución de un sistema $Ax = b$ con A no singular, según la regla, la solución es:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

$|A|$ = determinante de la matriz A (no nulo)
 $|A_i|$ = ^{El determinante de} la matriz obtenida al sustituir la columna i de la matriz A por el vector b

El cálculo de la solución requiere calcular $(n+1)$ determinantes de tamaño n .

Estimemos el orden de magnitud del n.º de operaciones necesarias para calcular un determinante de orden n . Desarrollando por una fila o columna, se reduce a calcular n determinantes de orden $(n-1)$

$$N_{op}(\det(n)) \geq n N_{op}(\det(n-1)) = n \cdot n-1 \cdot N_{op}(\det(n-2)) \dots$$

y se ve claramente que el número de operaciones es del orden de $n!$ (de hecho mayor, ya que además de calcular los n determinantes más pequeños hay que multiplicar por otros n números, sumar, etc.)
Concluyendo, el número de operaciones para resolver por Cramer viene a ser mayor que $n \cdot n!$ \Rightarrow Cramer prohibitivo como método de resolución

\Rightarrow En los sistemas lineales la solución existe, tenemos una forma de calcularla, pero hay que optimizar los métodos para hacerlos factibles

Esencialmente, se trata de manipular el sistema de ecuaciones (sin alterar la solución \Rightarrow obtener un sistema equivalente) para llegar a otro más fácil de resolver. Entre ellos se cuentan

- Multiplicar una ec. por una cte distinta de cero
- Sustituir una ec. por una combinación lineal de otras
- Cambiar el orden de las ecs no altera la solución
- Permutar incógnitas permuta la solución

• ELIMINACIÓN DE GAUSS

Existe en posa de nuestro sistema inicial $Ax=b$ a otro equivalente $Ux=b'$ donde U sea triangular superior ($u_{ij}=0$ por debajo de la diagonal, esto es si $i > j$)

$$(A)(x) = (b) \rightarrow \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} (x) = (b')$$

Resolución de sistemas triangulares

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ \rightarrow Resolviendo la última ecuación

y se va hacia atrás (back substitution)
backward

La penúltima ecuación

$$a_{n-1, n-1} x_{n-1} + a_{n-1, n} x_n = b_{n-1}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1, n-1}} (b_{n-1} - a_{n-1, n} x_n)$$

$$= \frac{1}{a_{n-1, n-1}} \left(b_{n-1} - a_{n-1, n} \frac{b_n}{a_{nn}} \right)$$

y así sucesivamente

$$N_{op} \approx \frac{n(n+1)}{2} \text{ para } n \text{ alto}$$

$$N_{op} \approx \frac{n^2}{2} \quad \text{Coste de operaciones para resolver un sistema triangular}$$

Todo lo dicho en cuanto a forma de resolver
y n^2 de operaciones es válido si tenemos un sistema

(4)

triangular inferior, solo que entonces empezamos a despejar a partir de x_1 (forward-substitution)

¿Cómo llegar a la forma triangular? Eliminación gaussiana

El algoritmo de eliminación gaussiana propiamente dicho es el que partiendo de una matriz cualquiera A "lleva" la convierte en una triangular superior. Para ello emplea una técnica de reducir columnas, llevando ceros por debajo de la diagonal

El mecanismo es:

- Supongo que $a_{11} \neq 0$
- Para cada fila ^{del sistema} por debajo de la fila 1 hallo el cociente entre su primer elemento a_{i1} y a_{11}

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$\bullet F_i - m_{i1} F_1 = F_i$$

El segundo paso será repetir lo mismo para la columna 2, suponiendo ahora que $a'_{22} \neq 0$. La diferencia es que solo modificamos los filas 3 en porque solo quiero ceros o's por debajo de la diagonal

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -7 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \textcircled{-3} & -9 & -12 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 2^a \text{ ec.} - 2 \cdot 1^a \text{ ec.} \\ 3^a \text{ ec.} - 3 \cdot 1^a \text{ ec.} \end{array}$$

(5)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_2 - 9x_3 = -12 \\ 20x_3 = 20 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{x_3 = 1} \Rightarrow -3x_2 - 9 \cdot 1 = -12 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1} \Rightarrow$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

→ Los elementos $a_{11}, a'_{22}, a''_{33} \dots$ que van apareciendo en la diagonal después de cada paso son los llamados pivots y hemos supuesto que no sean nulos.

Nº de operaciones necesarias para pasar de una A cualquiera a una U triangular superior

$$\frac{n}{3} \frac{n^3}{3}$$

Por lo que el total el nº de operaciones ~~del~~ que hay que hacer al aplicar el método de Gauss es de

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \approx \frac{n^3}{3}$$

Para reducir solución del sistema triangular a triangular

que es muchísimo mejor que el orden n^3 obtenido por Cramer

Variante de Gauss: eliminación Gauss-Jordan

Algo todavía más fácil para llegar tras las operaciones de modificaciones a un sistema diagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

que es trivial de resolver

$$x_r = \frac{b_r}{a_{rr}}$$

$\text{Nop. } \leq n < \frac{n^2}{2}$ para una triangular

¿Cómo llegar a un sistema diagonal? De la misma forma que antes, con eliminación de Gauss, lo único que en vez de procurar solo las filas por debajo de la diagonal, procuraré también las superiores, metiendo ceros por arriba y abajo de la diagonal

Mientras que en el paso r tenemos

$$\text{Fila}'(i) = \text{Fila}(i) - m_{ir} \text{Fila}(r) \text{ para } i > r$$

Ahora ~~de~~ tenemos

$$\text{Fila}'(i) = \text{Fila}(i) - m_{ir} \text{Fila}(r) \text{ para } i \neq r$$

Nº de operaciones para llegar a un sistema diagonal

$$\leq \frac{n^3}{2}$$

Vemos entonces que a pesar de que Gauss-Jordan es más rápido en la resolución del nuevo sistema, es más lento para llegar a él y globalmente por más el término $\frac{n^3}{2}$ por lo que si solo queremos resolver el sistema es preferible usar Gauss

→ Una situación donde Gauss-Jordan es preferible es cuando tratamos de invertir una matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

7

8

Pivotaje

hemos supuesto
Hasta ahora ~~supusimos~~ que nunca encontrábamos un $a_{rr} = 0$ en uno de nuestros pasos. Si encontramos un 0 debemos hacer una permutación de filas

$$i \text{ a } r = 0? \left\{ \begin{array}{l} \text{No} \rightarrow \text{Gauss como antes} \\ \text{Si} \rightarrow \text{Buscamos en } a_{ij} \neq 0 \text{ con } i > r \\ \text{e intercambiamos la fila } (i) \text{ y } (r) \end{array} \right.$$

Se busca el pivote no nulo entre las filas por debajo para no estropear el trabajo ya hecho con las filas 1 a $(r-1)$. A esta operación se la llama pivotaje

⇒ ~~Si~~ Puede pasar que llegados a un pto todos los elementos de la columna en \diagdown por debajo de la diagonal sean nulos impidiéndonos pivotar? Esto es posible si estamos trabajando con una matriz A no regular porque dicha situación implicaría que $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \textcircled{0} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} 0 & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

↑
tendríamos que pivotar sobre este

8

8

Uso general del pivoteo

Hasta ahora se ha considerado el pivoteo como una forma de evitar un error matemático al dividir por cero si uno de los pivotes es nulo. Sin embargo, como a menudo sucede si algo no puede ser, algo parecido va a dar problemas. Podemos encontrarnos con un pivote muy pequeño el cual al dividir por él nos va a dar errores de redondeo. En estos casos podemos pensar que también puede ser recomendable el pivoteo.

→ Podemos pensar no ya en evitar un pivote nulo si uno lo encontramos por casualidad sino incluso antes de hacer nada elegir el mejor pivote posible y ponerlo en el lugar adecuado mediante permutaciones. A esto se denomina ahora una estrategia de pivoteo y es imprescindible en la práctica para obtener buenos resultados.

→ • ¿Dónde buscar los posibles pivotes?

→ • ¿Cuál es nuestro criterio para decir que un pivote es mejor que otro?

Sabemos que si estamos en el paso r , los pivotes deben buscarse entre los filas r a n , ya que una permutación con los filas anteriores equivaldría a la forma triangular de la matriz con la que se guida hasta entonces. Hay 2 posibilidades:

1. - Pivoteo parcial: buscar el mejor pivote sólo entre los elementos de la columna r que estamos considerando

Esoger a la "mejor" con $i \geq r$

(9)

(11)

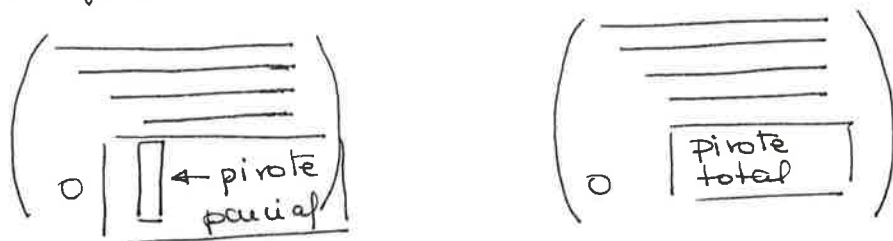
Aquí, una vez escogido el a_{ij} óptimo, no necesitamos permutar la fila (r) con la fila (i). Al tratarse de una permutación de filas la solución no cambia.

2. Pivoteaje total En este caso buscamos el pivote óptimo en un grupo más numeroso, en los $(n-r+1) \times (n-r+1)$ elementos de todas las columnas de (r) a (n) de las filas de (r) a (n)

Escoja a_{ij} mejor con $i \geq r, j \geq r$

Una vez elegido el a_{ij} óptimo intercambiaremos las fila (i) y (r) y a continuación las columnas (j) y (r). Al haber una permutación de columnas hay que tenerlo en cuenta, ya que supone una permutación de las componentes de la solución.

Gráficamente



Obviamente, la estrategia de pivote total debe dar mejores resultados, ya que engloba a la del pivote parcial (si el pivote óptimo está en la columna r también es elegido por pivoteaje total, pero lo contrario no sucede). Sin embargo, en la práctica la diferencia no es muy grande y se utiliza el pivoteaje parcial por su mayor velocidad y también porque al no revolver la solución evita tener que llevar la cuenta de las permutaciones de columnas realizadas.

10

10

Importancia práctica del pivoteo parcial

$$10^{-12}x + y = 1^0$$

$$x - y = 0^0$$

una solución exacta con 15 decimales es

$$x=y = 0.999999999999999000 \text{ por Gauss}$$

Vamos a resolverlo sin pivoteo mando 10 cifras significativas, esto es se redondean todas las operaciones a 10 cifras significativas

$$m_{21} = \frac{1^0}{10^{-12}} = 10^{12}$$

$$10^{-12}x + y = 1^0$$

$$-10^{12}y = -10^{12}$$

Ahora resolvemos el sistema triangular y obtenemos $x=0^0$ e $y=1^0$ y comprobamos que aunque z se resuelve con precisión el valor de x está lejos de ser el adecuado

Ahora un pivoteo parcial. Comparamos 10^{-12} con 1^0 y elegimos 1^0 como pivote, lo que nos hace cambiar el orden de las ecuaciones

$$x - y = 0^0$$

$$10^{-12}x + y = 1^0$$

Ahora $m_{21} = \frac{10^{-12}}{1^0} = 10^{-12}$ Restando 10^{-12} veces la primera ecuación a la segunda obtenemos el sistema

$$x - y = 0^0$$

$$y = 1^0$$

Cuya solución es ahora $x=y=1^0$ que es exacta para la precisión considerada (10 cifras)

sin embargo, a veces podemos tener problemas con este criterio. Multiplicamos la primera ecuación por 10^{13} (lo que obviamente no cambia la solución)

$$10x + 10^{13}y = 10^{13}$$

$$x + y = 10^0$$

Según el criterio ^{anterior} actual $10 > 10^0$ y no deberíamos pivotar. Sin embargo, si resolvemos el sistema anterior nos encontramos con la misma solución incorrecta de antes.

La idea de comparar los $|a_{ij}|$ por sí misma no es válida si todas las filas comparadas tienen unos valores del mismo orden de magnitud. De lo contrario podemos engañarnos y elegir un mal pivote.

→ Una posible solución sería, antes de empezar el proceso de eliminación y pivoteo, normalizar todas las filas de la matriz dividiendo por el coeficiente de mayor magnitud para que las posteriores operaciones de pivots se hagan en "igualdad de condiciones".

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

Se trata de trabajar únicamente con la matriz A , no de involucrar al vector b , tratando de expresar el como producto de matrices fácilmente invertibles.

$$A = BC \quad \text{para cualquier vector } b$$

$$Ax = b \rightarrow BCx = b \quad \text{que es fácil}$$

de resolver porque suponemos que B y C son fáciles de invertir.

FACTORIZACIÓN LU

Con A matriz no singular ($\exists A^{-1}$)

$A = LU$ se llama factorización LU de A
 con $L =$ matriz triangular inferior y $U =$ matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Para hallar los elementos de L y de U solo tenemos conocidos los elementos de A

tenemos 9 a_{ij} y desconocemos 6 l_{ij} y 6 u_{ij}
 evidentemente sin más restricciones ^{condiciones adicionales}
 ecuaciones no podemos calcular 12 incógnitas

Algoritmo de Doolittle

Imponemos que $l_{ii} = 1 \Rightarrow L$ matriz triangular inferior con 1's en su diagonal principal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Tenemos ahora 9 ecuaciones (9 a_{ij} conocidos) con 9 incógnitas (3 l_{ij} , $i > j$) y (6 u_{ij} ; $j \geq i$)

Con esto aseguramos una única factorización
 ¿cómo se calcula la factorización LU por este algoritmo?

1ª fila de $A =$ 1ª fila de $L \times$ 1ª, 2ª, 3ª columnas U
 \Rightarrow Obtenemos 1ª fila de U

$$a_{11} = u_{11}$$

$$a_{12} = u_{12}$$

$$a_{13} = u_{13}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \quad \text{consider}$$

1^a columna de A (menos a_{11}) = 2^a y 3^a fila de $L \times$ 1^a columna U

\Rightarrow 1^a columna de L

$$a_{21} = l_{21} u_{11} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$a_{31} = l_{31} u_{11} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & ? & 1 \end{pmatrix}$$

2^a fila de A (menos a_{21}) = 2^a fila de L \times ~~2^a~~ 2^a y 3^a columna de U

\Rightarrow 2^a fila de U

$$a_{22} = l_{21} u_{12} + u_{22} \rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} \quad U = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = l_{21} u_{13} + u_{23} \rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} u_{13}$$

2^a columna de A (menos a_{12} y a_{22}) = 3^a fila de L \times 2^a de U

\Rightarrow 2^a columna L

~~a_{22}~~

$$a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} u_{12}}{u_{22}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 1 \end{pmatrix}$$

3^a fila de A (menos a_{31} y a_{32}) = 3^a fila L \times 3^a columna U

$$a_{33} = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33}$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23}$$

$$U = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

14

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| \neq 0 \text{ No ha de falta } \\ \text{comprobado por que nos} \\ \text{van a dar mente} \\ \text{pi no podrem hallar la} \\ \text{factorizaci3n}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

1ª fila de A

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2 = u_{11} \\ a_{12} &= -4 = u_{12} \\ a_{13} &= 1 = u_{13} \end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

1ª columna de A (menos a_{11})

$$\begin{aligned} a_{21} &= 0 = l_{21} u_{11} \Rightarrow l_{21} = 0 \\ a_{31} &= 1 = l_{31} u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & ? & 1 \end{pmatrix}$$

2ª fila de A (menos a_{21})

$$\begin{aligned} 1 &= a_{22} = l_{21} u_{12} + u_{22} \Rightarrow u_{22} = 1 - 0 \cdot (-4) = 1 \\ 1 &= a_{23} = l_{21} u_{13} + u_{23} \Rightarrow u_{23} = 1 - 0 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

2ª columna de A (menos a_{12} y a_{22})

$$a_{32} = 2 = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} = -\frac{1}{2}(-4) + l_{32} \cdot 1$$

$$l_{32} = 2 - 2 = 0$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15

3^e fila de A (menos a_{31} y a_{32})

$$a_{33} = 0 = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + u_{33}$$

$$\boxed{u_{33} = \frac{1}{2}} \quad U = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

→ Si la matriz A es triangular \Rightarrow L y U son también triangulares

$$A = \begin{pmatrix} \diagup & \diagup & 0 \\ & \diagup & \diagup \\ 0 & & \diagup \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \diagup & & 0 \\ & \diagup & \diagup \\ 0 & & \diagup \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} \diagup & \diagup & 0 \\ & \diagup & \diagup \\ 0 & & \diagup \end{pmatrix}}_U$$

Algoritmo de Doolittle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

16

Aplicaciones de la factorización LU

1. Resolución de sistemas lineales

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \\ A = LU \end{array} \right\} \begin{array}{l} LUx = b \text{ si } Ux = y \Rightarrow \\ \Rightarrow Ly = b \end{array}$$

1º se resuelve $Ly = b$ y sacamos y

2º se resuelve $Ux = y$ y sacamos x que es la solución
de nuestro sistema

Ejemplo resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} -2x - 4y + z & = & 1 \\ y + z & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_U \text{ (descomposición anterior)}$$

$$Ux = y$$

$$Ly = b \Rightarrow \underset{\text{Resolvemos}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{rcl} y_1 & = & 1 \\ y_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_3 & = & 0 \end{array} \right\} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos ahora $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(17)

$$\begin{cases} -2x - 4y + z = 1 \\ y + z = 0 \\ \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Cálculo del determinante de una matriz
 Si $A = LU \Rightarrow |A| = |L| |U| = \prod_{i=1}^n l_{ii} \cdot u_{ii}$

Si hemos hecho una descomposición de Doolittle
 $|L| = 1 \Rightarrow |A| = |U|$

3. Cálculo de la inversa de una matriz
 A y queremos calcular A^{-1}

Sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{x_{11}} & \boxed{x_{12}} & \boxed{x_{13}} \\ \boxed{x_{21}} & \boxed{x_{22}} & \boxed{x_{23}} \\ \boxed{x_{31}} & \boxed{x_{32}} & \boxed{x_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$x^1 \quad x^2 \quad x^3 \qquad b^1 \quad b^2 \quad b^3$

Se verifica que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b^1$$

$$A x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b^2$$

$$A x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b^3$$

Tenemos que resolver 3 sistemas lineales con la misma A y una distinta b (Para esto es "ideal" la descomposición LU) para obtener "por columnas" la inversa de A

18

Exemple : Calculer la inverse de $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

j = colonne de la A^{-1} (par Doolittle LU)

$$LU \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} Ux' = y \\ Ly = b' \end{array}$$

$$Ly = b' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ux' = y \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & ? & ? \\ -1 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \end{pmatrix}$$

~~Para resolver finalmente de forma escalonada~~

Relación entre la eliminación de Gauss y la factorización LU

→ Nota que si repetimos Gauss con b distintos, obtenemos la misma matriz U porque todas las decisiones de pivote se toman en función de la matriz A misma sobre los valores del vector independiente

El principal problema de Gauss es que aplicábamos los m_{ij} así como las permutaciones correspondientes al vector b , olvidándonos luego de ellos

Si guardáramos los coef. m_{ij} y nos acordáramos de las permutaciones hechas, solo tendríamos que guardar la matriz U a la que llego y para cada b repetir las operaciones, pero sólo para el vector, no para la matriz

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - m_{21} b_1 \\ \vdots \\ b_n - m_{n1} b_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \rightarrow$$

Lo que se guardaría sería la matriz final U y la información acerca de los m_{ij} usados y las ^{permutaciones} realizadas

$$\text{Gauss: } Ax = b \rightarrow Ux = b'$$

$$\text{LU: } LUx = b \rightarrow Ux = b'$$

¿Podría ser que lo que llamamos " b' " en el método LU fuese el vector b transformado de Gauss (b')?

Gauss es una descomposición LU, donde U es la matriz a la que se llega en el proceso de Gauss y la matriz L es donde se almacena

lo que se tiene que hacer con cada b que nos den $Ly = b$ depende solo de b y de la matriz L

Presentamos la eliminación de Gauss suponiendo que no necesitamos pivoteo, por tanto, no hay que hacer permutaciones de filas

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Hacemos $L_1 A$

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{11}m_{21} + a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} - m_{21}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{11}m_{n1} + a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - m_{n1}a_{1n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} - m_{21} \text{ fila 1} \\ \vdots \\ \text{fila n} - m_{n1} \text{ fila 1} \end{pmatrix}$$

Es idéntico a aplicar el primer paso de Gauss
Siguiendo el proceso de Gauss

$$U = L_{n-1} L_{n-2} \dots L_2 L_1 A$$

por lo que

$$A = (L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}) U$$

Se puede comprobar que

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(21) (X)

En la práctica en vez de reservar espacio para guardar la matriz L , se utilizan las posiciones de A que se van anulando para meter los m_{ij} de forma que al acabar tenemos U en las posiciones superiores y la diagonal y a L en las inferiores (la diagonal de L por 1's y no hace falta guardarlos)

Teorema Para toda matriz no singular existe una permutación de filas de tal forma que la matriz permutada resultante PA admite una descomposición LU . Esto s puede que $A \neq LU$, pero existe una permutación P tal que $PA = LU$

NORMAS MATRICIALES

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Norma vectorial es una aplicación tal que a cada vector de \mathbb{R}^n le asigna un número de \mathbb{R}^+ que verifica

$$1. \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x. \quad \text{Si } \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ vector nulo}$$

$$2. \quad \|\mu x\| = |\mu| \|x\|$$

$$3. \quad \|x+z\| \leq \|x\| + \|z\|$$

Norma matricial es una aplicación tal que a cada matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$ le asigna un número de \mathbb{R}^+ que cumple

$$1. - \quad \|A\|_m \geq 0 \quad \forall A. \quad \text{Si } \|A\|_m = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$2. - \quad \|\mu A\|_m = |\mu| \|A\|_m$$

$$3. - \quad \|A+B\|_m \leq \|A\|_m + \|B\|_m$$

$$4. - \quad \|AB\|_m \leq \|A\|_m \cdot \|B\|_m$$

• Se dice que una norma vectorial $\|\cdot\|_v$ en \mathbb{R}^n y una norma matricial en $\mathbb{R}^{n \times n}$ son normas compatibles

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Normas matriciales "derivadas" de normas vectoriales

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \rightarrow \|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \left(\text{suma de los columnas} \right)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i \{ |x_i| \} \rightarrow \|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_i \left(\text{suma en fila} \right)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\rho(A) = \max_i (|\mu_i|) = \text{Radio espectral de } A$$

Teorema $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumple $\rho(A) = \max_i (|\mu_i|) \leq \|A\|_m$ para cualquier norma matricial

Supongamos $\rho(A) = |\mu|$ μ autovalor de A
 x su autovector
 $Ax = \mu x \Rightarrow (A - I\mu)x = 0$

$$\|Ax\|_v = \|\mu x\|_v = |\mu| \|x\|_v \leq \rho(A) \|x\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|_m$$

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = |I| \Rightarrow \mu = 1$$

24

24

Error en los métodos directos

Estimamos ahora los errores cometidos en nuestra estimación ^{de la solución} del sistema $Ax=b$. Se distinguen 2 fuentes de error:

- Error en los datos suministrados, esto es A y/o b . Las razones pueden ser errores experimentales si dichos cantidades vienen de una medida, o, más sutilmente, la obligación de imprecisión a la que nos vemos abocados al trabajar con un ordenador. Si por ejemplo en nuestra b hay un valor de $1/3$ el ordenador solo verá 0.333333333 .
⇒ Es decir incluso con datos "exactos", trabajamos con una perturbación del orden de la precisión de la máquina.
- Errores producidos por el redondeo de operaciones y que se acumulan en cada paso

Consideremos el primer caso:

→ Perturbaciones en la solución producidas por una perturbación en b

x solución real de $Ax=b$

$$x + \delta x \text{ solución de } A \cancel{x=b} \quad A(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$A\delta x = \delta b \quad \rightarrow \quad \delta x = A^{-1}\delta b$$

Aplicando normas $\|Ax\|_V = \|b\|_V$

$$\|b\| \leq \|A\| \|x\| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|$$

(25)

(X)

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ perturbación relativa en la solución provocada
 por una alteración relativa del vector independiente
 $\frac{\|b\|}{\|\delta b\|}$

\rightarrow A la cantidad $\|A\| \|A^{-1}\|$ que actúa como "amplificador" de las perturbaciones en el sistema original se le denomina número de condición o condiciónamiento de la matriz A

$$C(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Condicionamiento de una matriz

Un n° de condición alto implica que pequeñas perturbaciones en b (p.e. las debidas a la precisión finita de la máquina) pueden agrandarse \rightarrow La matriz A está mal condicionada. Con estas matrices podemos esperar problemas a la hora de resolver numéricamente

También, con un razonamiento similar podemos obtener

$$\frac{1}{C(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq C(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

De nuevo vemos que con $c(A)$ grandes, las cotas anteriores nos indican que la perturbación de x puede estar en cualquier sitio

$I =$ matriz identidad

$$1 \leq \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = c(A)$$

El condicionamiento de A es siempre mayor que o igual a 1. En el caso óptimo $c(A) = 1$, tendremos que el error relativo en la solución coincide con el de la perturbación. Dicho caso óptimo se alcanza para matrices ortogonales

$$A = \text{ortogonal} \quad A^{-1} = A^T \quad \text{y} \quad AA^T = I$$

y calculando su número de condición a partir de la norma $\|\cdot\|_2$

$$\left. \begin{aligned} \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 \\ \|A^{-1}\|_2 &= \sqrt{\rho(A^T A^T)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 \end{aligned} \right\} c(A) = 1$$

Como $c(A)$ depende de la norma utilizada a veces es útil usar una cota inferior de dichas cantidades, válida independientemente de la norma considerada

$$\left. \begin{aligned} \|A\| &\geq \rho(A) = |\lambda|_{\max} \\ \|A^{-1}\| &\geq \rho(A^{-1}) = \frac{1}{|\lambda|_{\min}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c(A) &= \|A\| \|A^{-1}\| \geq \\ \rho(A) \rho(A^{-1}) &= \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}} = c^*(A) \end{aligned}$$

(27)

(X)

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ Hallar una cota ^{superior} inferior para $c(A)$ inferior

Solución Calculando sus autovalores $\lambda_1 = 14.07$
y $\lambda_2 = 0.07 \Rightarrow c^*(A) = \frac{201}{198}$ que es bastante alto \Rightarrow Problemas al invertir A

Para esta matriz $\|A\|_1 = 17 = \|A^{-1}\|_1$
por lo que $c_1(A) = 289 > \frac{201}{198}$. En este ejemplo si

$$b = \begin{pmatrix} 2 \pm 0.01 \\ 3 \pm 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{0.02}{5} = 0.004 = 0.4\% \quad \text{sin embargo}$$

la variación en el vector solución podría ser de hasta un 80% ($0.004 \times 200 = 0.8$)

- De forma similar podemos acotar la variación en la solución al perturbar la matriz A por un δA

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

$$Ax + A\delta x + \delta A(x + \delta x) = b \quad \text{como } Ax = b$$

$$A\delta x + \delta A(x + \delta x) = 0$$

$$\delta x = A^{-1} \delta A (x + \delta x)$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\|$$

(28)

(28)

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \frac{\|A\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq c(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Efecto de los errores de redondeo

Hasta ahora hemos estudiado las alteraciones de la solución inducidas por alteraciones (perturbaciones) en los datos ¿qué pasa con los errores de redondeo?

Teorema Usando métodos de factorización introducimos un error de redondeo de forma que en vez de x solución de $Ax=b$ obtenemos una solución distinta x_c . Se puede comprobar que dicho vector es solución exacta del problema perturbado

$$(A+E)x_c = b$$

donde la magnitud de la matriz E depende del método empleado, estrategia de pivoteo y precisión utilizada

⇒ Los errores de redondeo son equivalentes a perturbar la matriz del sistema y dicha perturbación se puede ver agrandada por un $c(A)$ alto

⇒ Las matrices mal condicionadas por un problema no solo cuando los datos son imprecisos sino que sobre ellos los errores de redondeo tienen más efecto

→ Residuo

Otra posibilidad es no preocuparnos del condicionamiento de A , resolver el sistema e intentar detectar si los usos han ido mal a posteriori. Si llamamos x^* a la solución estimada por el método podemos calcular

$$r = Ax^* - b$$

esta cantidad, llamada residuo, debería ser nula si hemos acertado (ya que $Ax=b$). Intuitivamente si un residuo es pequeño es que los usos han ido bien y podemos con un x^* próximo a la solución verdadera pero acotando

$$\frac{1}{c(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} \leq c(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

De nuevo aparece $c(A)$. Si $c(A) \ll 1$ pequeños residuos implican pequeños errores en la solución. Sin embargo, si $c(A)$ es grande nos encontramos con que aunque el residuo sea pequeño, el error en la solución puede ser muy grande.

(30)

(8)